



УДК 796.015 : 796.058.2

## На пути к математической теории спортивной тренировки. Часть 1. Математическая модель тренировочного процесса и уравнение спортивного результата Николая Николаевича Энгвера

Е. А. Тимме<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Государственный научный центр Российской Федерации – Институт медико-биологических проблем Российской академии наук (ГНЦ РФ – ИМБП РАН), Москва, Россия

<sup>2</sup>Ассоциация компьютерных наук в спорте, Москва, Россия

### Аннотация

**Актуальность** 1960–70-е годы в СССР ознаменовались началом активного применения математических методов в спорте, что позволило перейти от интуитивного планирования тренировок к точным расчетам тренировочных нагрузок и прогнозу спортивных результатов. Одним из первых математиков, кто задумался над переводом эмпирических правил и принципов спортивной тренировки на математический язык, был доктор экономических наук Николай Николаевич Энгвер. Высказанные идеи и предложенные им математические модели незаслуженно забыты. Данная статья позволит широкому кругу читателей ознакомиться с идеями и наследием ученого.

**Целями** настоящей работы являлись систематизация, интерпретация и сравнительный анализ идей, методов и результатов доктора экономических наук, профессора Николая Николаевича Энгвера, разработавшего оригинальную математическую модель взаимосвязи тренировочных нагрузок и спортивных результатов, позволяющую прогнозировать рост наилучших результатов на основе управляемых параметров – интенсивности и объема тренировок, а также определить закономерности адаптации организма спортсмена к повышению нагрузок.

**Методы.** Был произведен анализ научных трудов и биографических материалов Н.Н. Энгвера, посвященных разработке и применению методов математической статистики и теории систем автоматического управления к анализу тренировок спортсменов и построению тренировочных планов.

**Результаты.** Систематизированы результаты научных исследований Н.Н. Энгвера, который построил математическую модель тренировочного процесса, включающую: 1) зависимость максимального результата спортсмена от средней интенсивности тренировок и их объема; 2) уравнение эффективности тренировочных нагрузок; 3) уравнение привыкания (адаптации) организма к работе с повышенной интенсивностью. Им разработаны практические рекомендации по дозированию нагрузок и планированию тренировочного процесса. Экспериментально подтверждено, что модель позволяет довольно точно прогнозировать рост спортивных результатов. Произведено сравнение модели Н.Н. Энгвера с моделью Э. Банистера. Установлено, что модель Энгвера пригодна для оперативного

планирования микроциклов (недели/месяцы), а модель Банистера оптимальна для долгосрочного управления тренировочным процессом (месяцы/годы). Выявлены ограничения обеих моделей.

**Заключение.** Н.Н. Энгвер был одним из первых, кто предпринял попытку применения математических методов к анализу, планированию тренировочного процесса и прогнозированию спортивных результатов. Его идеи и методы были незаслуженно забыты, но не потеряли свою актуальность и в настоящее время и могут быть использованы для планирования тренировочного процесса в различных видах спорта.

**Ключевые слова:** математическое моделирование тренировочного процесса, уравнение спортивного результата, объем тренировочной нагрузки, интенсивность тренировочной нагрузки, адаптация организма к нагрузке

---

## Towards a mathematical theory of athletic training. Part 1. The mathematical model of the training process and the equation of athletic performance by Nikolai Nikolaevich Engwer

E. A. Timme<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>State Scientific Center of Russian Federation – Institute of Bio-Medical Problems of the Russian Academy of Sciences (SSC RF – IBMP RAS), Moscow, Russia

<sup>2</sup>Russian Association of Computer Science in Sports, Moscow, Russia

### Abstract

**Relevance.** The 1960s and 1970s in the Soviet Union were marked by the introduction of mathematical methods into sports training. This allowed coaches to move away from intuitive training plans and start using accurate calculations to determine training loads and predict athletic performance. One of the pioneers in this field was Nikolai Nikolayevich Engwer, a doctor of economics. He was the first to try to translate the empirical rules and principles of sports training into mathematical terms. Unfortunately, his ideas and mathematical models have been forgotten. This article aims to introduce readers to the work and ideas of Nikolai Engwer. It will help people understand the importance of his contributions to the field of sports science.

**The objectives** of this work were to systematize, interpret and compare the ideas, methods, and results of Nikolai Engwer, a doctor of economics and professor, who developed an original mathematical model for the relationship between training load and sports performance. This model allows for predicting the growth of top-level results based on controlled parameters such as training intensity and volume, as well as determining patterns of adaptation in athletes' bodies to increased loads.

**Methods.** A review of scientific papers and biographical material by N.N. Engwer was conducted, focusing on his development and application of mathematical statistics methods and the theory of automated control systems for analyzing athletes' training and constructing training plans.

**Results.** The analysis revealed that Engwer's work has significant implications for the field of sports science, providing a valuable tool for coaches and athletes to optimize training regimens and achieve peak performance. The results of scientific research by N.N. Engwer have been systematized. He built a mathematical model of the training process that includes: 1) the dependence of the maximum result of an athlete on the average intensity of training and its volume; 2) an equation for the effectiveness of training loads; 3) an equation of habituation (adaptation) of the body to working with increased intensity. He also developed practical recommendations for load dosing and training process planning. The model has been experimentally verified and has shown that it can accurately predict athletic performance growth. The model developed by N.N. Engwer was compared to the model of E. Banister, and it was found that Engwer's model is better suited for short-term planning of microcycles (weeks or months), while Banister's model is more suitable for long-term training management (months or years). The limitations of both models are revealed.

**Conclusions.** N.N. Engwer was one of the pioneers who attempted to apply mathematical methods to analyze, plan the training process, and forecast sports results. His ideas and techniques were unfortunately overlooked, but they remain relevant today and can be applied to plan training in various sports.

**Keywords:** mathematical modeling of training process, equation of athletic performance, volume of training load, intensity of training load, body adaptation to load

---

## Введение

Период 1960–70-х годов стал переломным в истории мирового спорта: рекорды начали обновляться с беспрецедентной скоростью. Этот прорыв был напрямую связан с внедрением научного подхода в подготовку атлетов. Исследования в области физиологии, биомеханики и психологии позволили оптимизировать тренировочные методики, сделав их более целенаправленными и эффективными. Руководство спортивных организаций СССР и других стран осознавало, что для завоевания лидерства на олимпиадах и чемпионатах мира недостаточно таланта спортсменов, требовались инновационные решения, основанные на данных экспериментов и аналитики [1].

Прогнозирование спортивного результата и планирование тренировочного процесса являются одними из основополагающих задач в спорте. Зарубежные научные школы в сфере спортивной науки начали уделять внимание спортивному прогнозированию и планированию в 80–90-х годах XX века. Между тем, в нашей стране, благодаря развитию науки и техники в СССР в 50–60-е годы XX века, в частности, кибернетики, междисциплинарному взаимодействию математиков, физиологов и тренеров, этот процесс начался гораздо раньше – в 60–70-х годах. Так, первая научная конференция «Кибернетика и спорт» состоялась в 1965 году в ГЦОЛИФК, вторая конференция «Применение вычислительной техники в науке и спорте (кибернетика и спорт)» состоялась в 1968 году, первая конференция «Управление тренировочным процессом подготовки спортсменов» состоялась в 1971 году в Ленинграде. Многие советские ученые внесли заметный вклад в развитие математических методов прогнозирования, планирования и управления тренировочным процессом – этого важнейшего направления в отечественной спортивной науке. Именно в этот период спортивная подготовка в дополнение к тренерскому искусству получила в руки математический инструментарий и стала развиваться как точная дисциплина [2].

Одним из основных направлений прогнозирования в спорте является предсказывание наивысшего спортивного результата спортсмена по индивидуальным предикторам. В мире существует несколько подходов к решению этой задачи. Один интересный подход был разработан доктором экономических наук, профессором Николаем Николаевичем Энгвером в 1970-е годы.

Человек непростой судьбы, Николай Николаевич Энгвер [рис. 1](#) в 1962 году окончил экономический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова [3]. В 1970 году защитил кандидатскую, в 1984 году – докторскую диссертацию по кафедре статистики экономического факультета МГУ. С 1965 по 1967 годы работал инженером-исследователем группы статистики центральной заводской лаборатории Ижевского металлургического завода. В 1967-1970 гг. – аспирант кафедры статистики экономического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова (г. Москва). В 1970-1972 гг. работал по распределению в Латвийском отделении Научно-исследовательского института Центрального статистического управления СССР (НИИ ЦСУ СССР) (г. Рига). С 1972 по 1988 гг. работал в Удмуртском государственном университете (г. Ижевск). В 1988-1989 годах работал ведущим научным сотрудником Физико-технического института Удмуртского отделения Уральского Научного центра Академии наук СССР (г. Ижевск). Автор более 40 научных трудов в области прогнозирования.



Рис. 1: Доктор экономических наук, профессор Николай Николаевич Энгвер [4]

Fig. 1: Doctor of Economics, Professor Nikolai Nikolaevich Engver

Научные интересы Н.Н. Энгвера лежали в области разработки и применения математико-статистических методов в экономических прогнозах [5, 6, 7, 8]. Как-то между делом он вывел «формулу победы» для спортсменов, и во время проведения Олимпийских игр в Сочи в 2014 году с гордостью отмечал, когда речь заходила о тренировках спортсменов, что они работают по его формуле, даже этого не осознавая.

С 1960 по 1970 годы он специально занимался изучением аналогий между эконометрическими и биологическими объектами с точки зрения выбора формы связи при математико-статистической обработке эмпирической информации. В результате была разработана простая, интуитивно понятная математическая модель, описывающая взаимосвязь между

результатом, интенсивностью и объемом тренировочных нагрузок, а также процессом привыкания организма спортсмена к новому уровню интенсивности [9, 10].

## Методы

Был произведен анализ научных трудов и биографических материалов Н.Н. Энгвера, который применял методы математической статистики и теорию систем автоматического управления к анализу тренировочных дневников спортсменов, которые содержали данные тренировок пловцов и тяжелоатлетов, где фиксировались интенсивность, объем тренировочных нагрузок и их еженедельные наилучшие спортивные результаты за 3 года. Также было осуществлено сравнение различных подходов к моделированию тренировочного процесса.

## Результаты

### Подход Н.Н. Энгвера к моделированию тренировочного процесса

#### Постановка задачи

Во время тренировок физическая нагрузка на организм спортсмена разнообразна, зависит от множества факторов и имеет целью достижение новых личных рекордов и рост физического, физиологического и психического потенциала спортсмена. Считается, что изменение нагрузки во время регулярных занятий благодаря адаптационным процессам должно приводить к изменению спортивного результата. Задача построения уравнения для спортивного результата заключается в разработке формулы, которая позволит вычислить соревновательный результат на основе известной тренировочной работы спортсмена. При этом считается, что соревновательный результат – это оптимальное достижение спортсмена при определенных условиях, демонстрирующее его предельные возможности. Н.Н. Энгвер полагал, что соревновательный результат зависит от трех основных факторов: общего развития, специального развития, которое достигается через целенаправленный тренировочный процесс, и влияния случайных обстоятельств [6, 10].

Задача состояла в поиске отображения  $f$ , ставящего в соответствие спортивной нагрузке СН соревновательный результат  $R$ :

$$f : \text{СН} \rightarrow R. \quad (1)$$

В простейшем случае, когда спортивная нагрузка характеризуется лишь двумя переменными – интенсивностью  $J$  и объемом  $N$ , уравнение принимает вид

$$R = f(J, N), \quad (2)$$

где  $R$  – соревновательный результат спортсмена,  $J$  – интенсивность тренировочной работы,  $N$  – объем тренировочной нагрузки.

Задача заключалась в том, чтобы построить уравнение (2), определив форму связи между соревновательным результатом и аргументами, находящимися под контролем спортсмена и его тренера во время тренировки. В приводимых уравнениях понятиям «интенсивность» и «объем» тренировочной нагрузки придается смысл, связанный со статистическими характеристиками построенных моделей.

Термин «интенсивность» в спортивной науке может трактоваться двояко, в зависимости от контекста и специфики вида спорта. С одной стороны, интенсивность понимается как качественный показатель нагрузки, отражающий степень близости выполняемого упражнения к максимальному результату спортсмена. С другой стороны, в некоторых дисциплинах, особенно циклических, интенсивность может рассматриваться как скорость или темп выполнения упражнения, что особенно важно для анализа техники и энергетических затрат. Эти два аспекта не противоречат друг другу, а скорее дополняют общее понимание тренировочной нагрузки. В силовых и скоростно-силовых видах спорта приоритет отдается первому значению (качеству нагрузки), тогда как в циклических видах чаще акцентируется внимание на скоростных характеристиках. В работах Н.Н. Энгвера интенсивность – это показатель нагрузки, измеряемый в тех же единицах, что и спортивный результат. Например, в беге и плавании это секунды и минуты, в прыжках, толкании ядра, метании молота или копья – метры, в тяжелой атлетике – килограммы. Интенсивность является обобщающей характеристикой качества проделанной тренировочной работы и статистически может выражаться средней арифметической, модой или медианой. Это означает, что тренировочную работу с более качественными характеристиками, т.е. с повышенной интенсивностью, спортсмен может выполнять реже (т.е. с меньшим числом повторений), чем работу средней или низкой интенсивности, которая выполняется чаще или с большим числом повторений. Объем нагрузки – это показатель тренировочной работы, который характеризует количество повторений спортсменом на тренировке соревновательного упражнения или его части с различным уровнем интенсивности. В беге и плавании – это количество повторений определенной дистанции или ее отрезков, в тяжелой атлетике – количество движений со штангой [10].

### Основная идея

Из практики известно, что работу с более высокой интенсивностью спортсмен может выполнять с меньшим числом повторений, чем работу с меньшей интенсивностью, которая выполняется с большим числом повторений. Это означает, что тренировочный процесс можно описать функцией, моделирующей вариационный ряд, где варьирующим признаком является интенсивность, а частотами – повторения упражнений, выполняемых с определенной интенсивностью. Н.Н. Энгвер отмечал, что, прежде чем появилась догадка о виде формулы спортивного результата и удалось получить кое-что приемлемое, этому предшествовало большое количество неудачных попыток [6]. Вся работа базировалась на трехлетних данных наблюдения за спортсменами-пловцами спортклуба «Ижсталь», где осуществлялась тренировка мышечных групп, от которых зависит мощность гребка в кроле. Основное упражнение состояло в жиме от груди штанги различного веса из положения лежа на спине. В пятидневном микроцикле силовой подготовки после дня отдыха проводился тест для установления максимального количества жимов. По окончании, результаты были собраны в таблицу и вычислена доля жимов со штангой определенного веса (таблица 1).

Именно эта таблица навела на мысль, что максимальные возможности организма являются элементами статистического распределения усилий, которые спортсмен выдерживает во время теста до наступления усталости. Основная идея состояла в том, что как для большинства практически встречающихся в математической статистике функций распределения, для уравнения спортивного результата возможно выразить крайние значения варьирующего признака через параметры функции распределения. Эта идея неоднократно проверялась для упражнений со штангой и в плавании. Эмпирическим путем удалось выяснить, что всякий раз, когда средний вес штанги или скорость на проплываемых от-

Таблица 1: Результаты теста максимального количества жимов штанги в трехлетнем периоде

Доля жимов, %	Вес штанги, кг		
	1967 г.	1968 г.	1969 г.
50	45	55	65
75	45	55	85
85	52	75	85
95	62	75	115
97	62	85	115
Рекордный вес штанги, кг	90	120	120

резках существенно (в среднем по микроциклу) увеличивались, то после дня отдыха в конце микроцикла спортсмен устанавливал личный рекорд. Отклонений от этого правила практически не наблюдалось. Более того, если средний вес или скорость в микроцикле не увеличивались, а возрастало только количество повторений, то результат теста в конце микроцикла мог как улучшиться, так и остаться неизменным или даже ухудшиться.

### Построение уравнения спортивного результата

Вид функции распределения был установлен на основе обработки спортивных дневников. При этом уравнение спортивного результата есть явное выражение  $R$  через  $J$  и  $N$  и некоторые параметры путем соответствующего преобразования функции распределения.

При построении функции распределения был взят наиболее часто встречающийся в биологии и биометрии закон распределения варьирующего признака – нормальное распределение [11]:

$$f(R_i) = \frac{Nk}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{R_i - J}{\sigma}\right)^2}. \quad (3)$$

Разрешая это уравнение относительно  $R_i$ , получается уравнение спортивного результата, который спортсмен в состоянии показать  $f(R_i)$  только один раз, при условии, что средний тренировочный результат равен  $J$ , а количество повторений равно  $N$ .

Итоговая формула спортивного результата имеет вид:

$$R_i = J \pm \sqrt{a_0 + a_1 \ln N - a_2 \ln f(R_i)}, \quad (4)$$

где  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  – эмпирические константы. При полном напряжении сил соревновательный результат может быть показан только один раз, т.е. при  $f(R_i) = 1$  и  $\ln(f(R_i)) = 0$ , «формула рекорда» принимает следующий вид (5):

$$R = f(J, N) = J \pm \sqrt{a_0 + a_1 \ln N}. \quad (5)$$

Эмпирические константы  $a_0$ ,  $a_1$  вычисляются методом наименьших квадратов по фактическим данным, взятым из дневников спортсменов, значения которых зависят от вида спорта, индивидуальных особенностей организма спортсмена и методики тренировки. Выбор знака перед радикалом в формуле (3) зависит от вида спорта: в беге, плавании выбирается знак минус, т.к. рекордный результат должен быть меньше средней интенсивности, а в тяжелой атлетике, прыжках, выбирается знак плюс, так как рекордный результат должен быть больше средней интенсивности.

Для практических нужд – планирования тренировочной работы формула (4) немного видоизменяется (6), в нее вставляется  $M_i = f(R_i)$ , которая является частотой повторения на тренировке результата  $R_i$ :

$$R_i = J \pm \sqrt{a_0 + a_1 \ln N - a_2 \ln M_i} \quad (6)$$

Это показывает, что в отличие от рекорда (4), значения нерекордных результатов зависят от интенсивности, объема и частоты повторений.

### Эффективность управления тренировкой

Формула (5) позволяет решить вопрос об эффективности тренировочного процесса. Управляемыми переменными тренировки, на которые могут влиять спортсмен и тренер, являются интенсивность  $J$  и количество повторений  $N$ .

Для того чтобы определить вклад, который может внести каждый из аргументов в изменение соревновательного результата, находятся частные производные по каждой независимой переменной (7) и полный дифференциал соревновательного результата (8) [12]:

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial J} = 1, \\ \frac{\partial R}{\partial N} = \frac{a_1}{2N\sqrt{a_0 + a_1 \ln N}}. \end{cases} \quad (7)$$

$$dR \approx \frac{\partial R}{\partial J} dJ + \frac{\partial R}{\partial N} dN. \quad (8)$$

Приближенное уравнение полного дифференциала при  $dJ \approx \Delta J$  и  $dN \approx \Delta N$  выглядит следующим образом (9):

$$\Delta R \approx \Delta J + \frac{a_1}{2N\sqrt{a_0 + a_1 \ln N}} \Delta N. \quad (9)$$

Эмпирические константы  $a_0$  и  $a_1$ , как правило, малы по сравнению с  $N$ , поэтому изменение интенсивности дает больший вклад в приращение результата, чем объем нагрузки.

Из формулы (9) следует, что при заданной интенсивности тренировки улучшение соревновательного результата за счет повышения нагрузки происходит с падающей интенсивностью.

При больших объемах нагрузки, второе слагаемое в формуле (9) стремится к нулю, поэтому для оценки приращения соревновательного результата можно воспользоваться неравенством (10):

$$\Delta R \geq \Delta J. \quad (10)$$

### Привыкание организма к новой интенсивности

Привыкание организма спортсмена к интенсивности тренировочной нагрузки выражается в том, что прежняя интенсивность тренировки постепенно приводит к снижению прироста спортивного результата и нужна новая, более высокая интенсивность, чтобы добиться необходимого прироста спортивного результата.

Если интенсивность изменилась скачкообразно на величину  $\Delta J$  в допустимых для данного спортсмена пределах, то на основании приближенного равенства  $\Delta R \approx \Delta J$ , спортсмен может выйти на новый рекордный уровень результата (11):

$$R_{\text{новый}} = R_{\text{старый}} + \Delta R. \quad (11)$$

При этом, если интенсивность изменяется скачкообразно в допустимых для данного спортсмена границах, то новый результат проявляется не сразу, а в результате привыкания организма к работе с новой интенсивностью  $J + \Delta J$ . Это привыкание выразится в том, что организм постепенно сможет выполнять работу с новой интенсивностью в прежнем или большем объеме. При этом привыкание рассматривается как переходный процесс, который может быть описан при помощи математического аппарата системы автоматического регулирования [13]. Из формулы (11) следует, что между старым и новым рекордными результатами существует постепенное улучшение соревновательного результата  $R(t)$ , которое зависит от количества тренировок с новой интенсивностью (12):

$$R(t) = R_{\text{новый}}(1 - e^{-\frac{t}{T}}), \quad (12)$$

где  $t$  – время в днях,  $T$  – индивидуальный параметр, который может быть определен эмпирически для каждого спортсмена и вида спорта на основе записей тренировок в спортивных дневниках методом минимизации квадратов отклонений фактических данных от зависимости (12).

Через определенное время  $t$  после начала работы спортсмена с новой интенсивностью после начала переходного процесса, соревновательный результат возрастет примерно в  $\sigma(t)$  раз (13). Характерные значения функции  $\sigma(t)$ , характеризующей процесс перехода к новому результату, показаны в таблице 2.

$$R(t) = R_{\text{старый}} + \sigma(t)\Delta J. \quad (13)$$

Таблица 2: Характерные значения переходной функции  $\sigma(t)$

$t$	$\sigma(t)$
$T$	0,63
$2T$	0,866
$3T$	0,997

Параметр времени  $T$  является очень важной индивидуальной адаптационной характеристикой организма спортсмена и позволяет довольно точно определить момент, когда следует переходить к новой интенсивности, чтобы обеспечить рост соревновательного результата и не останавливаться в спортивных успехах.

### Пример построения функции привыкания

Н.Н. Энгвер привел примеры, иллюстрирующие, что его методика имеет практическое применение [6]. Был рассмотрен пример увеличения силы пловца в упражнении со штангой (жим лежа из положения на спине). Личный рекорд спортсмена, т.е. упражнение, которое спортсмен мог повторить только один раз, равнялся 90 кг.

К тому моменту, когда спортсмен и его тренер начали работать с целью выйти на новый личный рекорд, интенсивность нагрузки составляла 50 кг. Было решено увеличить

интенсивность до 80 кг. Это значение веса штанги очень близко к прежнему рекорду, но в каждом упражнении с весом 80 кг, когда спортсмен уже мог выполнять 5-6 жимов.

Построить тренировку необходимо было так, чтобы средний вес штанги в жиме равнялся 80 кг, но можно было работать с весами 70, 75, 80 и даже 85 кг, но средний вес должен был составить именно 80 кг. Записывая прирост интенсивности, получим:

$$\Delta J = 80 - 50 = 30 \text{ кг.}$$

Следовательно, согласно вышеизложенному, применяя оценку (10), получается:

$$\Delta R = \Delta J = 30 \text{ кг,}$$

т.е. через некоторое время можно было рассчитывать на новый рекорд:

$$R_{\text{новый}} = 80 + 30 = 110 \text{ кг.}$$

Через 5 тренировок со средней интенсивностью 80 кг и общим количеством жимов 2227 был устроен день отдыха, после чего спортсмен повторил свой личный рекорд. Еще через 4 тренировки с той же интенсивностью и количеством жимов 2276, после дня отдыха, спортсмен выжал штангу весом 100 кг. К этому моменту общее количество жимов с интенсивностью 80 кг составило 4543. После очередных 5 тренировок и после одного дня отдыха, спортсмен выжал штангу весом 105 кг. Наконец, очередная пятидневка, и после дня отдыха взят вес 110 кг. Всего для нового рекорда потребовалось 19 тренировок и 4 дня отдыха, т.е. 23 календарных дня, при этом, общее количество жимов (тренировочный объем) составило 6928. Данные процесса выхода на новый рекордный спортивный результат сведены в [таблицу 3](#).

Таблица 3: Динамика изменения рекордных результатов в жиме штанги при поэтапном увеличении нагрузки

№ пп	$R$	$\Delta R$	Доля прироста $\Delta J$	Кол-во тренировок	Время $t$	Кол-во жимов
1	80	-	-	-	-	-
2	90	10	0,33	5	-	2227
3	100	20	0,66	9	T	4543
4	105	25	0,83	14	2T	5857
5	110	30	1,00	19	3T	6928

В среднем получилось 365 жимов за тренировку и по мере удаления от старого рекорда (90 кг), возрастала доля жимов штанги весом более 90 кг и даже более 100 кг. Закрепление успеха достигалось за счет реализации на тренировке принципа «делать редкое частым», который следует прямо из формулы (6). Постоянная времени равнялась в данном случае 6 дням (5 тренировочных дней и 1 день отдыха), что составило один тренировочный микроцикл. Таким образом теоретические положения, хоть и с небольшой погрешностью, были подтверждены практикой. Постоянная времени может сильно варьироваться в зависимости от вида спорта, выполняемого упражнения и конкретного спортсмена.

Во втором примере формула рекорда была проверена на соответствие принятой форме распределения фактическим данным для пловцов. Было проведено 7 микроциклов по 4-5 дней в каждом, с последующим днем отдыха и специальным тестом (старт-контролем). Количество повторений дистанции 200 м брассом в микроциклах и средняя интенсивность нагрузки в микроциклах показаны в [таблице 4](#).

Реализация принципа «делать редкое частым» от микроцикла к микроциклу выглядела так: результат 188,0 с был показан в первом микроцикле только 1 раз, во втором – 7 раз, в третьем – 6 раз, с пятого микроцикла оказалось возможным делать более частым результат 184,0 с, который в этом микроцикле был показан 6 раз, однако, снова

вернулись к накоплению результата 188 с, который был здесь показан 13 раз, в седьмом микроцикле спортсмен показал этот результат уже 19 раз, что можно считать прочной адаптацией. Хронологическая последовательность лучших результатов показана в [таблице 4](#) (4-я строчка).

Значения лучших результатов дают также хорошее совпадение с вышеизложенной теорией. Для определения существенности различий эмпирических форм распределений был применен лямбда-критерий Колмогорова. Ни в одном из микроциклов отклонение фактических данных от того, что предписывала теория, не было существенным. В то же время, недостатком проведенной проверки являлось то, что не было взято установки на достижение личного рекорда. Однако, подтвердилась правильность основной идеи, что предельные возможности организма являются элементом статистического распределения его возможностей вообще, причем нормального распределения. Практически это означает, что адаптационные регуляторы организма поднимают его максимальные возможности так высоко, чтобы создать примерно 50% запас надежности по сравнению с обычной, средней, наиболее частой работой. В этом и состоит статистический механизм адаптации к нагрузке разной интенсивности.

Таблица 4: Динамика изменения скоростных показателей в плавании на 200 м брассом в зависимости от интенсивности и объема тренировочных нагрузок

№ микроцикла	1	2	3	4	5	6	7
Количество повторений, ед	72	80	54	52	40	97	49
Средняя интенсивность, с	199,5	192,8	192,6	190,2	189,0	191,0	188,0
Лучший результат, с	188,0	186,0	188,0	184,0	182,0	184,0	182,0

### Математическая модель

Разработанная Н.Н. Энгвером математическая модель тренировочного процесса состоит из трех эмпирических зависимостей (формул) [\[6, 10\]](#):

- 1) Формула рекорда (5).
- 2) Уравнение эффективности назначаемых тренировочных нагрузок (9).
- 3) Уравнение привыкания (адаптации) организма к работе с повышенной интенсивностью (12).

### Практические рекомендации

Из описанной математической модели следуют практические рекомендации:

- 1) Предельные возможности спортсмена являются в первом приближении функцией двух аргументов: интенсивности и объема тренировочной нагрузки.
- 2) Сдвиг соревновательного (рекордного) результата  $\Delta R$  можно оценить снизу по сдвигу интенсивности  $\Delta J$ .
- 3) Выход на новый предельный уровень, т.е. установление личного рекорда, происходит постепенно, по мере привыкания организма к новой интенсивности. Эффективность увеличения объема нагрузки при постоянной интенсивности экспоненциально падает.

Эти рекомендации могут оказать существенную пользу тренерам и спортсменам при планировании тренировочных нагрузок и позволят избежать перенапряжений при желании получить результаты более высокие, чем допускают регуляторы адаптационных систем спортсмена.

## Подход Э. Банистера к моделированию тренировочного процесса

Первые математические модели, получившие наименование «доза-ответ» за рубежом начали разрабатываться канадской научной школой спортивной физиологии [14, 15].

Авторы математической модели, профессор Эрик Банистер [рис. 2](#) с коллегами стремились решить проблему количественного прогнозирования спортивных результатов в зависимости от тренировочных нагрузок, представленных временным рядом, используя динамическую модель с экзогенным входом, основанную на концепции свертки и экспоненциального сглаживания [16]. Ключевой вопрос состоял в следующем: «как динамика тренировок влияет на профиль производительности атлета в течение определенного периода?» [14].



Рис. 2: Профессор Эрик Банистер  
Fig. 2: Professor Eric Bannister [17]

Особое внимание уделялось оптимизации пика формы посредством управления снижением нагрузки ("tapering") для достижения максимального результата к определенному соревновательному дню.

### Основная идея

Производительность спортсмена ( $p(t)$  — *performance*) определяется балансом двух физиологических процессов:

тренированность ( $f(t)$  — *fitness*) — долгосрочный положительный эффект тренировок, отражающий адаптацию организма и проявляющийся ростом производительности после некоторого периода восстановления, характеризуемого временем  $\tau_1$  и амплитудой эффекта  $k_1$ ;

утомление ( $g(t) - fatigue$ ) — краткосрочный негативный эффект, вызванный накоплением метаболитов, повреждением тканей и психологическим истощением, проявляющийся в снижении производительности и характеризуемый временем  $\tau_2$  и амплитудой эффекта  $k_2$ .

Математически эта идея выражается соотношением: значение производительности в фиксированный момент времени прямо пропорционально взвешенной разности значений тренированности и утомления в этот момент:

$$p(t) = k_1 f(t) - k_2 g(t). \quad (14)$$

### Математическая модель

Перед применением модели необходимо преобразовать входные и выходные данные в числовой формат (квантификация). Для тренировочной нагрузки используется метод расчета *тренировочных импульсов*  $w$ , количественно отражающих совокупный эффект тренировочного стимула. На основе данных частоты сердечных сокращений  $hr$  с пульсометра, тренировочный импульс вычисляется как [14]:

$$w = \int_0^T R_{hr}(t) \cdot La(t) dt, \quad (15)$$

где  $w$  — значение тренировочного импульса (ед.),  $T$  — длительность тренировки (с),  $R_{hr}(t)$  — резерв ЧСС,  $La(t)$  — индивидуальный лактатный профиль.

*Резерв ЧСС* характеризует мгновенный уровень физиологического напряжения и рассчитывается по данным пульсометра:

$$R_{hr}(t) = \frac{hr(t) - hr_{\min}}{hr_{\max} - hr_{\min}}, \quad (16)$$

где  $hr(t)$  — текущее значение ЧСС,  $hr_{\max}$ ,  $hr_{\min}$  — максимальное и минимальное значения ЧСС.

Выход модели (уровень развития целевого качества или спортивный результат) также подлежит квантификации. Учитывая экспоненциальный характер кривой рекордов, преобразование абсолютного результата в линейную шкалу выполняется по формуле [15]:

$$y = L - a \cdot e^{b \cdot x}, \quad (17)$$

где  $y$  — результат в абсолютных единицах (время, расстояние и т.д.),  $x$  — результат в стандартизированных баллах,  $L$  — оценка предельного результата,  $a$  и  $b$  — нормировочные коэффициенты.

Для описания тренировочного процесса применяются дискретные модели свертки, где результат в момент времени  $t$  зависит от истории тренировочных воздействий:

$$p(t) = p(0) + \sum_{s=0}^t f(t-s) \cdot w(s), \quad (18)$$

где  $f(t-s)$  — функция влияния импульса  $w(s)$  в момент  $s$  на результат в момент  $t$ ,  $p(0)$ ,  $p(t)$  — результаты в начальный момент и момент  $t$ .

Наиболее распространенная модель данного класса [14, 15]:

$$p(t) = p(0) + k_1 \cdot \sum_{s=0}^t w(s) \cdot e^{-\frac{t-s}{\tau_1}} - k_2 \cdot \sum_{s=0}^t w(s) \cdot e^{-\frac{t-s}{\tau_2}}, \quad (19)$$

где  $\tau_1$  – характерное время запаздывания тренировочного эффекта,  $\tau_2$  – характерное время накопления усталости,  $k_1$  и  $k_2$  – коэффициенты вклада тренировки и усталости,  $w(t)$  – тренировочный импульс в момент  $t$ .

Модель Э. Банистера показала, что пик формы возникает не от нагрузок большого объема, а от их своевременного снижения, поскольку накопленное утомление быстрее утилизируется, чем рост тренированности. В какой то мере это произвело революционные изменения в планировании тренировок в циклических видах спорта.

## Ограничения моделей

Модель Энгвера не описывает некоторые эффекты, наблюдаемые в реальном тренировочном процессе:

- накопление усталости при длительных или высокоинтенсивных нагрузках; - снижение производительности (спортивного результата) из-за перетренированности;
- нарастание детренированности при снижении или прекращении тренировочных нагрузок;
- изменение производительности (спортивного результата) при уменьшении объема и/или интенсивности нагрузок.

Также в модели характерное время адаптации  $T$  считается индивидуальной, но фиксированной константой для данного спортсмена и упражнения, хотя в реальности  $T$  может меняться в зависимости от текущего состояния спортсмена, этапа подготовки или уровня нагрузки. Основное уравнение (5) связывает рекордный результат ( $R$ ) только со средней интенсивностью ( $J$ ) и объемом ( $N$ ) в микроцикле. Модель не учитывает распределение нагрузки внутри микроцикла (вариативность интенсивности), качество восстановления, влияние предыдущих нагрузок (отставленный тренировочный эффект).

Модель лучше валидирована для относительно однородных и измеримых нагрузок (силовые упражнения со штангой, плавание на фиксированных отрезках), но её применимость к сложнокоординационным или игровым видам спорта с трудно формализуемой и измеряемой интенсивностью под вопросом.

Модель оптимальна для оперативного планирования микроциклов (недели/месяцы), но не предназначена для долгосрочного прогнозирования.

Модель Банистера также имеет определенные расхождения с реальностью. При неограниченном увеличении тренировочных импульсов производительность (спортивный результат) возрастает также неограниченно, что противоречит существованию физиологического предела адаптации. Модель не учитывает возможные изменения параметров времени ( $\tau_1$ ,  $\tau_2$ ) и коэффициентов ( $k_1$ ,  $k_2$ ) конкретного спортсмена с ростом его квалификации, возрастом или на разных этапах спортивной подготовки.

Предположение о линейной зависимости производительности от разницы тренированности и утомления и линейной свертке импульсов является значительным упрощением, поскольку биологические системы часто демонстрируют нелинейные и пороговые эффекты.

## Сравнение подходов Н.Н. Энгвера и Э. Банистера

Ключевые аспекты сравнения двух подходов к математическому моделированию тренировочного процесса представлены в [таблице 5](#).

Таблица 5: Ключевые аспекты сравнения моделей Н.Н. Энгвера и Э. Банистера

Критерий	Модель Н.Н. Энгвера	Модель Э. Банистера
Теоретическая основа	Математическая статистика, теория распределений (нормальное распределение усилий)	Системная динамика, теория автоматического управления (передаточные функции, импульсные отклики)
Структура модели	Три эмпирических уравнения: 1. уравнение рекорда (связь результата с интенсивностью/объемом); 2. уравнение эффективности нагрузок; 3. уравнение адаптации (экспоненциальное привыкание).	Двухкомпонентная система: 1. тренированность (долгосрочная адаптация); 2. усталость (краткосрочный эффект); производительность представляется как линейная комбинация текущих значений тренированности и утомления.
Ключевые переменные	Интенсивность $J$ , объем нагрузок $N$ , спортивный результат $R$ , время адаптации $T$ .	Вход модели - временной ряд нагрузки (тренировочных импульсов) $w(t)$ . Выход модели - временной ряд производительности $p(t)$ .
Математический аппарат	Явные формулы с эмпирическими константами: (5), (9), (12)	Формула свертки временного ряда с 5-ю параметрами и множителями экспоненциального сглаживания (19)
Параметры	Индивидуальное время адаптации $T$ , определяемое эмпирически.	Показатели времени и коэффициенты тренированности $\tau_1, k_1$ , усталости $\tau_2, k_2$ , начальная производительность $p(0)$
Практическое применение	Оптимизация дозирования нагрузок: принцип «делать редкое частым»; прогноз роста результата при скачке интенсивности.	Управление пиком «спортивной формы»: расчет «затухания» (tapering) для снижения утомления перед соревнованиями; предотвращение перетренированности.

## Выводы

Исходя из сравнения двух различных методологий, можно сделать следующие выводы:

Во-первых, подходы Н. Энгвера и Э. Банистера существенно различаются. Энгвер использует статистические распределения для описания предельных возможностей организма, акцентируя внимание на управлении интенсивностью  $J$  и объемом  $N$ . В противовес этому, Банистер применяет линейные системы, которые разделяют эффекты тренировки на тренированность, характеризующую долгосрочный рост, и усталость, приводящую к краткосрочному подавлению результата.

Во-вторых, управление тренировочным процессом в этих моделях осуществляется по-разному. Ключевым фактором подхода Энгвера является скачкообразное увеличение интенсивности нагрузки с дальнейшей адаптацией организма. В то же время, у Бани-

стера критически важен баланс между тренированностью и усталостью, где пик формы достигается только при снижении нагрузки, что приводит к уменьшению уровня усталости.

В-третьих, обе модели прошли верификацию через экспериментальные исследования. Модель Н. Энгвера была подтверждена на примерах из тяжелой атлетики и плавания, в то время как модель Э. Банистера опирается на многолетние наблюдения за пловцами, что подчеркивает ее практическую применимость.

Также важно отметить, что данные подходы дополняют друг друга. Модель Энгвера оказывается эффективной для оперативного планирования микроциклов, таких как недели или месяцы, в то время как модель Банистера оптимальна для долгосрочного управления спортивной формой, охватывающего месяцы или годы.

Однако существуют определенные ограничения в обеих подходах. Модель Энгвера не учитывает кумулятивный эффект усталости и эффекты детренированности, что может снижать ее точность. Модель Банистера, в свою очередь, игнорирует биологический предел адаптации к нагрузкам и предполагает фиксированные значения параметров, что также снижает её точность.

В заключение, обе модели имеют большой потенциал для использования в прогнозных моделях, генераторах оптимальных тренировочных планов и других аналитических инструментах управления спортивной тренировкой. Подход Энгвера особенно актуален для дисциплин с относительно измеримой интенсивностью, таких как тяжелая атлетика и спринт, тогда как модель Банистера более подходит для циклических видов спорта, где критически важен пик формы, например, в плавании и беге.

## Заключение

Работа Н.Н. Энгвера продемонстрировала один из эффективных математических подходов к планированию тренировок. Его методика, первоначально разработанная для плавания и тяжелой атлетики, может быть адаптирована и для других видов спорта. Последующие исследования могут уточнить параметры модели для разных дисциплин и индивидуальных особенностей спортсменов.

Интеграция подходов к моделированию Н. Энгвера и Э. Банистера позволит в дальнейшем разрабатывать гибридные системы управления тренировочным процессом, что открывает новые горизонты для повышения эффективности спортивной подготовки.

При этом оба подхода не свободны от недостатков, которые присущи кибернетическим методам «черного ящика», используемым при исследовании живой системы, где на ее входе и выходе находятся первое и последнее звено сложнейшей причинно-следственной цепи и при этом остается необъясненным скрытый механизм работы всей системы [18].

## Список литературы/References

1. Пронин С.А. «Золотой век» отечественной спортивной науки и журнал «Теория и практика физической культуры» (1969-1980 гг.) // Теория и практика физической культуры. 2015. № 6. С. 6-7. EDN: <https://www.elibrary.ru/uacbbp>

Pronin S.A. The "Golden Age" of domestic sports science and the journal "Theory and Practice of Physical Culture" (1969-1980). *Theory and Practice of Physical Culture*, 2015, (6), pp. 6-7. (in Russ.)

2. Тимме Е.А., Богомолов А.В. Научные коммуникации в спортивной информатике // Спортивно-педагогическое образование. 2018. № 1-2. С. 183-191. EDN: <https://elibrary.ru/yavkfn>

- Timme E.A., Bogomolov A.V. Scientific communications in sports informatics *Sports-Pedagogical Education*, 2018, (1-2), pp. 183-191. (in Russ.)
3. Энгвер Н.Н. Непоправимость зла. Москва : Литрес, 2022. 380 с. ISBN 978-5-94201-566-4  
Engwer N.N. *Irreparability of Evil*, Moscow: Litres, 2022. 380 p. (in Russ.)
  4. Энгвер, Николай Николаевич [Электронный ресурс]. (Дата обращения: 02.07.2025).  
Engwer, Nikolai Nikolaevich [Electronic resource]. (in Russ.) URL:  
[https://ru.ruwiki.ru/wiki/Энгвер,\\_Николай\\_Николаевич](https://ru.ruwiki.ru/wiki/Энгвер,_Николай_Николаевич) (Accessed: 02.07.2025).
  5. Энгвер Н.Н. Экстраполяция при обработке коротких хронологических рядов в экономике // Вестник Московского у-та, 1978. С. 6.  
Engwer N.N. Extrapolation in the processing of short chronological series in economics. *Bulletin of Moscow University*, 1978, pp. 6. (in Russ.)
  6. Энгвер Н.Н. Математико-статистические методы построения экономических прогнозов: подготовка предупреждающей информации в экономике. — Ижевск: Удмуртия, 1976. 302 с.  
Engwer N.N. *Mathematical and statistical methods for building economic forecasts: preparation of warning information in economics*, Izhevsk: Udmurtia, 1976, 302 p. (in Russ.)
  7. Энгвер Н.Н. Проблема выбора формы связи при математико-статистической обработке экономической информации: автореф. дис. ... канд. экон. наук. Москва, 1970, 24 с.  
Engwer N.N. *The problem of choosing a form of connection in mathematical and statistical processing of economic information: Abstract of Cand. Sci. (Econ.) Dissertation*, Moscow, 1970, 24 p. (in Russ.)
  8. Энгвер Н.Н. Основные проблемы экономического прогнозирования // Проблемы регрессионного анализа, экономических функций и экономического прогнозирования: Материалы научной конференции. Рига, 1970. С. 53.  
Engwer N.N. Main problems of economic forecasting. *Problems of Regression Analysis, Economic Functions, and Economic Forecasting: Proceedings of the Scientific Conference*, Riga, 1970, pp. 53. (in Russ.)
  9. Энгвер Н.Н. Уравнение спортивного результата // Подготовка предупреждающей информации (Методические рекомендации). Рига, 1970. С. 73-76.  
Engwer N.N. The equation of sports results. *Preparation of Warning Information (Methodological Recommendations)*, Riga, 1970, P. 73-76. (in Russ.)
  10. Энгвер Н.Н., Савицкий Я.И., Гибадуллин М.Г. Построение эмпирических формул и моделей в спорте // Теория и практика физической культуры. 1986. № 10. С. 35-37.  
Engwer N.N., Savitskiy Ya.I., Gibanulin M.G. Construction of empirical formulas and models in sports. *Theory and Practice of Physical Culture*, 1986, (10), pp. 35-37. (in Russ.)
  11. Бейли Н., Томас Д. Математика в биологии и медицине. Москва: Мир, 1970. 326 с.  
Bailey N., Thomas D. *Mathematics in Biology and Medicine*, Moscow: Mir, 1970, 326 p. (in Russ.)
  12. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 1. Москва.: Рипол Классик, 1966. 616 с.  
Fichtenholz G.M. *Course of Differential and Integral Calculus*, Volume 1, Moscow: Ripol Classic, 1966, 616 p. (in Russ.)
  13. Милсум Д. Анализ биологических систем управления. Москва.: Мир, 1968. 501 с.  
Millsum D. *Analysis of Biological Control Systems*, Moscow: Mir, 1968, 501 p. (in Russ.)
  14. Banister E.W., Calvert T.W., Savage M.V., Bach T.M. A systems model of training for athletic performance. *Australian Journal of Sports Medicine*, 1975, 7(3), pp. 57-61.
  15. Calvert T.W., Banister E.W., Savage M.V., Bach T. A systems model of the effects of training on physical performance. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 1976, SMC-6(2), pp. 94-102. DOI: <https://doi.org/10.1109/TSMC.1976.5409179>

16. Герасимов Б.И., Пучков Н.П., Протасов Д.Н. Дифференциальные динамические модели: учебное пособие. — Тамбов: Изд-во ГОУ ВПО ТГТУ, 2010. 80 с. ISBN 978-5-8265-0947-0  
Gerasimov B.I., Puchkov N.P., Protasov D.N. *Differential Dynamic Models: A Textbook*, Tambov: TSTU Publishing House, 2010, 80 p. (in Russ.)
17. Fukuba Y., Morton R.H. Professor Eric W. Vanister 1932–2010: an obituary. *European Journal of Applied Physiology*, 2011, 111, pp. 2631-2632. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00421-011-1904-5>
18. Фролов И.Т. Очерки методологии биологического исследования. Москва: URSS, 2007. 286 с. EDN: <https://www.elibrary.ru/qkpuqh>  
Frolov I.T. *Essays on the methodology of biological research*, Moscow: URSS, 2007, 286 p. (in Russ.)

## Финансирование

Настоящее исследование выполнено в рамках программы фундаментальных исследований ГНЦ РФ - ИМБП РАН (№ FMFR-2024-0037).

## Сведения об авторе

**Тимме Егор Анатольевич** – лаборатория профилактики гипогравитационных нарушений, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Государственный научный центр Российской Федерации — Институт медико-биологических проблем Российской академии наук, Москва, Россия. E-mail: [alpdem@yandex.ru](mailto:alpdem@yandex.ru)

## Для цитирования:

Тимме Е.А. На пути к математической теории спортивной тренировки. Часть 1. Математическая модель тренировочного процесса и уравнение спортивного результата Николая Николаевича Энгвера // Российский журнал информационных технологий в спорте. – 2025. – Т. 2, № 2. – С. 24–41. DOI: <https://doi.org/10.62105/2949-6349-2025-2-2-24-41> EDN: QKHJKJ

## For citation:

Timme E.A. Towards a mathematical theory of training. Part 1. Mathematical model of the training process and the equation of athletic performance by Nikolai Nikolaevich Engwer. *Russian Journal of Information Technology in Sports*, 2025, 2 (2), pp. 24–41 (in Russ.) DOI: <https://doi.org/10.62105/2949-6349-2025-2-2-24-41> EDN: QKHJKJ

---

*Статья поступила в редакцию: 07.07.2025*

*Статья принята в печать: 10.07.2025*

*Статья опубликована: 23.07.2025*